1.3 미분

(1) 변화율과 도함수

함수 $y=f(x)$에 대한 평균 변화율은 x의 변화량에 대한 y의 변화량의 비율로 정의된다.
즉, x가 a에서 b까지 변화하면

$$\text{평균 변화율} = x\text{의 변화량에 대한 } y\text{의 변화량의 비율}$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (x\text{가 } a\text{에서 } b\text{까지 변화하면})$$

$$= \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad (b-a=\Delta x\text{라 놓으면})$$

이때 평균 변화율의 기하학적인 의미는 $y=f(x)$의 x좌표가 a인 점과 b인 점을 맺는 직선의 기울기를 나타낸다.

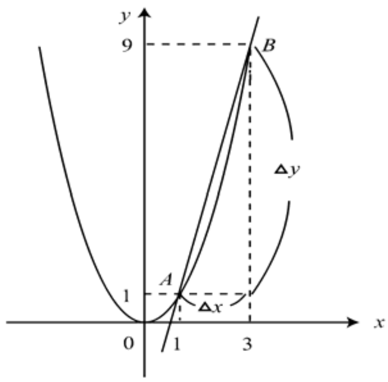
예제 1

함수 $f(x)=x^2$에서 x가 1에서 3까지 변화할 때 $y=f(x)$의 평균 변화율을 구하여라.

풀이

구간 [1, 3]에서의 y의 평균 변화율은 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-1}{3-1} = 4$.

이 평균 변화율 값 4는 두 점 A(1,1), B(3,9)를 지나는 직선의 기울기와 같다.



함수 $y=f(x)$에서 구간 $[a,\ a+\Delta x]$에서의 평균변화율의 $\Delta x\to 0$일 때의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$$

이 존재하면, 이 극한값을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 (순간)변화율 또는 미분계수 (differential coefficient)라 하고 $f'(a)$로 나타낸다.

한편 $a+\Delta x=x$라 하면 변화율은

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

와 같이 정의할 수도 있다.

예제 2

함수 $f(x)=3x^2$에서 $x=2$에서의 변화율(미분계수)을 구하여라.

풀이

$$\begin{aligned}f'(2)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\cdot(2+\Delta x)^2-3\cdot 2^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\cdot(4+4\Delta x+(\Delta x)^2)-12}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{12\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(12+3\Delta x)=12\end{aligned}$$

앞에서 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$를 정의하였는데, a 대신에 임의의 x값으로 바꾼 $f'(x)$를 $f(x)$의 도함수라고 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$에서

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

이 존재하면, 이 극한값을 함수 $f(x)$의 도함수(derivative)라 하고 $f'(x)$로 나타낸다.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 미분한다(differentiate)고 한다.

함수 $y=f(x)$의 도함수는,

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ Df(x)$$

등의 기호를 써서 나타낸다.

예제 3

함수 $f(x)=3x^2$의 도함수를 도함수의 정의에 의하여 구하여라.

풀이

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\cdot(x+\Delta x)^2 - 3\cdot x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\cdot(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-3x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (6x+3\Delta x) = 6x \end{aligned}$$

(2) 미분의 기본공식

(정리) 함수$f(x)$, $g(x)$가 미분 가능하고 c가 상수이면

(1) $y=c$이면 $y'=0$

(2) $y=cf(x)$이면 $y'=cf'(x)$

(3) $y=f(x)\pm g(x)$이면 $y'=f'(x)\pm g'(x)$ (복호동순)

(4) $y=x^n$(n은 실수)이면 $y'=nx^{n-1}$

(5) $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(6) $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$이면 $y'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$이다.

(증명)

(1) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c-c}{\Delta x}$

$=0$

(2) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c\{f(x+\Delta x)-f(x)\}}{\Delta x}$

$=c\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$=cf'(x)$

(3) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)\pm g(x+\Delta x)-\{f(x)\pm g(x)\}}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left\{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right\}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\pm\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

$=f'(x)\pm g'(x)$

(4) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2}{2!} + \cdots + (\Delta x)^n\right) - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2}{2!} + \cdots + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)x^{n-2}\Delta x}{2!} + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right)$$

$$= nx^{n-1}$$

(주) 이항정리

$(a + b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_nb^n$ (n : 양의 정수)

(주) 이항정리

위 예제 풀이는 n이 양의 정수일 때 증명했지만 미분 관계식은 임의의 실수에 대하여도 성립한다.

(5) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x)}{\Delta x} + \frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ f(x + \Delta x)\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x - \quad) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

(6) $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x+\Delta x) \cdot g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f(x)\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

예제 4

다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=(x^3+1)(x^2-x)$ (2) $y=\dfrac{1}{x^3}$ (3) $y=\dfrac{1-x}{x^2+2}$

풀이

(1) $y'=(x^3+1)'(x^2-x)+(x^3+1)(x^2-x)'$

$$=3x^2(x^2-x)+(x^3+1)(2x-1)$$

$$=3x^4-3x^3+2x^4-x^3+2x-1$$

$$=5x^4-4x^3+2x-1$$

(2) $y'=\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'=(x^{-3})'=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$

(3) $y'=\dfrac{(1-x)'(x^2+2)-(1-x)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$

$$=\frac{-(x^2+2)-(1-x)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$$

(3) 합성함수의 미분법

합성함수란 예를 들어 $y=(2x+1)^3$과 같은 함수로 $u=2x+1$로 놓으면 $y=u^3$이 된다.

(정리) 일반적으로 합성함수는 $y=f(u)$, $u=g(x)$일때 $y=f(g(x))$로 표현되고

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)$$

이다.

(증명)

x의 증분 Δx에 대한 $u=g(x)$와 $y=f(g(x))$의 증분을 각각 $\Delta u, \Delta y$라 하면

$$\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x) \text{ 또는 } g(x+\Delta x)=u+\Delta u$$

$$\Delta y=f(g(x+\Delta x))-f(g(x))=f(u+\Delta u)-f(u)$$

이다. 따라서

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

여기에서 $\Delta x\to 0$일 때 $\Delta u\to 0$이므로

$$=\frac{df}{du}\cdot\frac{dg}{dx}=f'(u)g'(x)$$

가 성립한다.

예제 5

다음 합성함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=(2x+1)^3$　　(2) $y=\left(\dfrac{3x}{x+2}\right)^4$　　(3) $y=\sqrt{3x+1}$

풀이

(1) $y=u^3,\quad u=2x+1$이라 하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=3(2x+1)^2\cdot(2x+1)'$$
$$=3(2x+1)^2\cdot 2$$
$$=6(2x+1)^2$$

(2) $y=u^4,\ u=\dfrac{3x}{x+2}$라 하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=4\left(\frac{3x}{x+2}\right)^3\cdot\left(\frac{3x}{x+2}\right)'$$
$$=4\left(\frac{3x}{x+2}\right)^3\cdot\frac{(3x)'(x+2)-3x(x+2)'}{(x+2)^2}$$
$$=4\left(\frac{3x}{x+2}\right)^3\cdot\frac{6}{(x+2)^2}=\frac{648x^3}{(x+2)^5}$$

(3) $y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}},\ u=3x+1$이라 하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(3x+1)'$$
$$=\frac{3}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$$

(4) 음함수의 미분법

음함수란 x의 함수 y가 $f(x,y)=0$ 의 형태로 표현된 함수이고, 양함수란 $y=f(x)$의 형태로 표현된 함수이다.

음함수의 미분은 주어진 함수를 양함수로 변형하여 미분하거나, 그렇지 않으면 주어진 음함수 $f(x,y)=0$의 양변을 직접 x에 관하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하거나 또는 y에 관하여 미분하여 $\dfrac{dx}{dy}$를 구한다.

예제 6

$x^3-3x^2y+y^3=0$에서 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

풀이

y는 x에 관한 함수로 보고 양변을 x에 관하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^3)-\frac{d}{dx}(3x^2y)-\frac{d}{dx}(y^3)=0$$

$$3x^2-6xy-3x^2\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

따라서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-2xy}{x^2-y^2} \quad (x^2-y^2\neq 0)$$

(5) 역함수의 미분법

(정리)

함수 $y=f(x)$가 미분 가능하고 역함수를 가질 때 $\dfrac{dx}{dy}\neq 0$이면 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 미분 가능하고

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$ 이다.

(증명)

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$=\frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

예제 7

$x=3y^2+5y+1$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여라.

풀이

$\dfrac{dx}{dy}=6y+5$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{6y+5}$$

(6) 삼각함수의 미분법

(정리) 삼각함수의 미분공식

(1) $y=\sin x$일 때 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$일 때 $y'=-\sin x$

(3) $y=\tan x$일 때 $y'=\sec^2 x$

(4) $y=\cot x$일 때 $y'=-\csc^2 x$

(5) $y=\sec x$일 때 $y'=\sec x\tan x$

(6) $y=\csc x$일 때 $y'=-\csc x\cot x$

(증명)

(1) $(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$

$\left(\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right.$ 이므로)

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\qquad\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=1\right)$$

$=\cos x$

(2) $(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}$

$\left(\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right.$ 이므로)

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= -\sin x$$

(3) $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(4) $(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

(5) $(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{0 - 1\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$

(6) $(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{0 - 1\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x$

예제 8

다음 함수들을 미분하여라.

(1) $y = \cos(\sin x)$ (2) $y = \tan^3 x$

풀이

(1) $u = \sin x$라 두면 $y = \cos u$

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = -\sin u\cdot(\cos x) = -\cos x \sin(\sin x)$$

(2) $y' = 3\tan^2 x(\tan x)'$

$= 3\tan^2 x\cdot\sec^2 x$

(7) 지수함수와 로그함수의 미분법

(정리) 지수함수와 로그함수의 미분

(1) $y=e^x$이면 $y'=e^x$

(2) $y=a^x$이면 $y'=a^x\ln a$

(3) $y=\ln x$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$

(4) $y=\log_a x$이면 $y'=\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln a}$

(증명)

(1) $y=e^x$에서

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

$$=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot 1=e^x$$

(2) $y=a^x$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln y=x\ln a$$

x로 양변을 미분하면

$$\frac{1}{y}y'=\ln a$$

$$\therefore\quad y'=y\ln a=a^x\ln a$$

(3) $y=\ln x$에서

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

(4) $y = \log_a x$에서

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

양변을 x로 미분하면

$$y' = \frac{1}{x} \frac{1}{\ln a}$$

예제 9

다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y = 2 \cdot 3^x$ (2) $y = e^x \cdot \ln 3$

(3) $y = e^{x^2} \sin x$ (4) $y = \ln(\tan x)$

풀이

(1) $y' = 2(3^x)' = 2 \cdot 3^x \ln 3 = 2(\ln 3) \cdot 3^x$

(2) $y' = (e^x)' \cdot \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} = e^x (\ln x + \frac{1}{x})$

(3) $y' = (e^{x^2})' \sin x + e^{x^2} (\sin x)'$

$= e^{x^2} (x^2)' \sin x + e^{x^2} \cos x$

$= e^{x^2} (2x \sin x + \cos x)$

(4) $y' = \frac{1}{\tan x} (\tan x)' = \frac{1}{\tan x} sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$

1.4 적분

(1) 부정적분

함수 $f(x)$가 주어졌을 때 $F'(x)=f(x)$가 되는 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분(indefinite integral) 또는 원시함수라 한다.

함수 $f(x)$의 부정적분은 무수히 많으며, 그 중에서 한 개의 부정적분을 알면 다른 것은 어떤 상수를 더하여 얻어진다. 함수 $f(x)$의 부정적분은 $\int f(x)dx$라는 기호로 나타낸다. 즉,

$$F'(x)=f(x)\text{일 때,}$$
$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

이며 C를 적분상수, x는 적분변수, $f(x)$는 피적분함수라고 한다.

함수 $f(x)$가 주어졌을 때, 그것의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 하고 그 계산법을 적분법이라 한다.

적분은 미분의 역과정이므로 기존의 미분공식으로부터 다음 적분의 기본 공식을 얻는다.

① $\int kdx=kx+C$ (k는 상수)

② $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ ($n\neq-1$일 때)

$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ ($n=-1$일 때)

③ $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (k는 상수)

④ $\int \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ (복호동순)

예제 1

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 5\,dx$ (2) $\int x^3 dx$

(3) $\int (3x^2+4x+2)dx$ (4) $\int (x+\frac{1}{x})^3 dx$

풀이

(1) $\int 5dx = 5x + C$

(2) $\int x^3 dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C$

(3) $\int (3x^2+4x+2)dx = \int 3x^2 dx + \int 4x dx + \int 2dx$

$= x^3 + 2x^2 + 2x + C$

(4) $\int (x+\frac{1}{x})^3 dx = \int (x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3})dx$

$= \int (x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + x^{-3})dx$

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 3\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C$

(2) 삼각함수의 적분

삼각함수 미분법의 역연산을 생각하면 다음과 같은 삼각함수의 부정적분법이 성립한다.

① $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

② $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

③ $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

④ $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$

⑤ $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

⑥ $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$

예제 2

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx$ (2) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$

풀이

(1) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$이므로, 이를 주어진 식에 대입하면

$$\int \left(\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)}\right) dx = \int (1-\sin x) dx$$
$$= x + \cos x + C$$

(2) $$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\sin x} \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$$

(3) 지수함수의 적분

지수함수 미분법의 역연산을 생각하면 다음과 같은 지수함수의 부정적분법이 성립한다.

① $\int e^x dx = e^x + C$

② $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

예제 3

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (2e^x + 5x + 1)dx$ (2) $\int (3e^x - 2^x)dx$

풀이

(1) $2e^x - \dfrac{5}{2}x^2 + x + C$ (2) $3e^x - \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$

(4) 치환적분

(정리)

$\int f(x)dx = F(x) + C$ 이면

$\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$ $(a \neq 0)$이다.

(증명)

$ax + b = t$로 치환하고 양변을 t로 미분하면

$a\dfrac{dx}{dt} = 1$이므로 $dx = \dfrac{1}{a}dt$.

따라서 $\int f(ax+b)dx = \int f(t)\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}F(t)+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$

예제 4

다음 함수의 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (ax+b)^n dx$ $(n \neq -1)$ (2) $\int \frac{1}{ax+b}dx$

(3) $\int \sin(ax+b)dx$ (4) $\int e^{ax+b}dx$

(5) $\int a^{bx+d}dx$

풀이

(1) $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$

(2) $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

(3) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$

(4) $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C$

(5) $\int a^{bx+d}dx = \frac{1}{b\ln a}a^{bx+d}+C$

예제 5

다음 함수의 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (x^4+1)^2 4x^3\,dx$ (2) $\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx$

풀이

(1) $x^4+1=t$로 치환하고 양변을 t에 관하여 미분하면

$4x^3\frac{dx}{dt}=1$이므로 $4x^3dx=dt$가 된다. 따라서

$$\int (x^4+1)^2 4x^3\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3+C$$
$$= \frac{1}{3}(x^4+1)^3+C$$

(2) $x^3+1=t$로 치환하고 양변을 t에 관하여 미분하면

$3x^2\frac{dx}{dt}=1$이므로 $3x^2dx=dt$가 된다. 따라서

$$\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|+C$$
$$= \ln|x^3+1|+C$$

위의 예제를 일반화시키면 다음과 같은 치환적분식이 성립한다.

① $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$ ($g(x)=t$로 치환)

② $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$ ($f(x)=t$로 치환)

(5) 분수함수의 적분

지금까지 소개한 적분법 중에서 분수함수 형태의 적분법을 정리하면 아래와 같다.

① $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

② $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \ (a \neq 0)$

③ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

분수함수이면서 위의 경우에 해당하지 않는 경우에는 대부분 분수식을 부분분수로 변형하여 적분하면 된다.

④ $\int \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)dx$

$= \ln|x+a| - \ln|x+b| + C = \ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$

예제 6

함수 $\int \frac{2}{x^2-1}dx$ 의 부정적분을 구하여라.

풀이

분모를 인수분해하면

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

분자를 비교하면 $2 = A(x+1) + B(x-1)$에서 $A = 1$, $B = -1$을 얻는다.

$$\therefore \int \frac{2}{x^2-1}dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

(6) 부분적분법

부분적분법은 두 함수의 곱의 형태를 적분할 때 유용하게 사용된다.

함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분 가능일 때

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

이므로

$$f(x)g'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) - f'(x)g(x)$$

이다. 양변을 x에 관해서 적분하면

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}(f(x)g(x))\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx$$

$$\therefore \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

예제 7

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int xe^{2x}dx$ (2) $\int x\sin x dx$

풀이

(1) $\int xe^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

(2) $\int x\sin x dx = x\cdot(-\cos x) - \int 1\cdot(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C$